Peter Dörsam

Mathematik

anschaulich dargestellt

für Studierende der Wirtschaftswissenschaften

16. überarbeitete Auflage
mit zahlreichen Abbildungen

PD-Verlag Heidenau

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

1. Auflage Juni 1993
2. überarbeitete und erweiterte Auflage Dezember 1993
3. überarbeitete Auflage Februar 1994
4. überarbeitete und erweiterte Auflage Juli 1994 (ISBN 3-930737-00-0)
5. überarbeitete und erweiterte Auflage Juli 1995 (ISBN 3-930737-05-1)
6. überarbeitete und erweiterte Auflage Januar 1997 (ISBN 3-930737-06-X)
7. überarbeitete Auflage April 1997 (ISBN 3-930737-07-8)
8. überarbeitete und erweiterte Auflage August 1998 (ISBN 3-930737-08-6)
9. überarbeitete und erweiterte Auflage März 2000 (ISBN 3-930737-09-4)
10. überarbeitete und erweiterte Auflage Januar 2002 (ISBN 3-930737-30-2)
11. überarbeitete und erweiterte Auflage Juni 2003 (ISBN 3-930737-11-6)
12. überarbeitete Auflage November 2004 (ISBN 3-930737-27-2)
13. überarbeitete Auflage Dezember 2006, (ISBN 978-3-86707-013-3)
14. überarbeitete und erweiterte Auflage Dez. 2008, (ISBN 978-3-86707-014-0)
15. überarbeitete Auflage November 2010, (ISBN 978-3-86707-015-7)
16. überarbeitete Auflage September 2014, 107. - 116. Tausend

Tel. 04182/401037, FAX: 04182/401038
http://www.pd-verlag.de, e-mail: info@pd-verlag.de
Druck: CPI books GmbH, Leck

ISBN 978-3-86707-016-4

Vorwort

Dieses Buch entstand über mehrere Semester, begleitend zu meinen Mathematikkursen an der Universität Hamburg. Seit längerer Zeit stößt es auch an zahlreichen anderen Universitäten auf großes Interesse. Daher wurde die Stoffauswahl immer wieder erweitert, detaillierte Informationen zu den Änderungen und Erweiterungen bei den jeweiligen Auflagen finden Sie am Ende dieses Vorworts. Ausgerichtet ist das Buch an den Mathematikkursen im Rahmen des Bachelor-Studiums.

In dem Buch wird versucht, die Grundideen der mathematischen Zusammenhänge darzustellen, denn es ist meine feste Überzeugung, dass sich viele Dinge in der Mathematik durchaus "begreifen lassen". Diese Grundideen werden in der Regel anhand von Aufgaben erläutert. Die formale Seite der Mathematik kommt hierbei aus der Sicht des Mathematikers sicherlich zu kurz. Formale Beweisführungen gibt es in diesem Buch nur dort, wo sie für das Verständnis der Zusammenhänge nützlich sind.

Für manch einen mag die Mathematikausbildung für Studierende der Wirtschaftswissenschaften als eine üble Hürde weltfremder Studienplaner erscheinen. Die Frage: "Wozu braucht man das alles?", ist nicht selten zu hören. Daher sei hier betont, dass die Mathematik für das Verständnis weiter Bereiche der Wirtschaftswissenschaften das elementare Handwerkszeug darstellt. Aus diesem Grund werden die für die Ökonomie besonders wichtigen Bereiche der Mathematik, wie etwa das Lagrange-Verfahren, besonders ausführlich behandelt. Außerdem werden für diese Gebiete typische Anwendungen in der Ökonomie besprochen.

Ich hoffe, dass dieses Buch sowohl für die Mathematikprüfungen als auch die Anwendung der Mathematik in der Ökonomie eine echte Hilfestellung bietet. Für Verbesserungsvorschläge oder Hinweise auf vorhandene Fehler bin ich stets dankbar.

Nachfolgend sind die wichtigsten Änderungen an diesem Buch ab der 5. Auflage dargestellt, bei dieser wurden insbesondere Abschnitte zu Elastizitäten, die in der Ökonomie eine wichtige Rolle spielen, und zur Finanzmathematik aufgenommen. Bei der 6. Auflage wurden weiterhin

Abschnitte zur linearen Optimierung und zu Folgen und Reihen hinzugefügt. Einige andere Kapitel wurden überarbeitet. Während bei der 7. Auflage lediglich einige Überarbeitungen vorgenommen wurden, sind bei der 8. Auflage insbesondere die Abschnitte 1.1, 1.2 und 1.4 neu ausgearbeitet und erweitert worden. Außerdem wurden in den Kapiteln 3, 4 und 8 mehrere Änderungen und Ergänzungen vorgenommen.

Bei der 9. Auflage wurde ein Abschnitt zum Newton-Verfahren (4.9.2) hinzugefügt, und der Abschnitt zur linearen Optimierung (1.8) wurde überarbeitet bzw. ergänzt. Weiterhin wurde ab Kapitel 2 eine neue Einteilung der Kapitel gewählt. Im 3. Kapitel werden jetzt Funktionen behandelt. In diesem Rahmen werden auch Grenzwerte von Funktionen betrachtet, diese wurden bisher im 2. Kapitel besprochen. Aufgrund des eigenen Kapitels für Funktionen erhöht sich bei den folgenden Kapiteln jeweils die Nummer. Schließlich sind die Differentialgleichungen jetzt direkt hinter der Integralrechnung angesiedelt; diese neue Anordnung wurde wegen des engen Zusammenhangs zwischen diesen Bereichen gewählt. Bei der 10. Auflage wurden wiederum Überarbeitungen vorgenommen. Erweitert wurden die Abschnitte zu Grenzwerten von Funktionen (3.9) und einige Bereiche zur Integralrechnung (5.4 und 5.5).

Bei der 11. Auflage wurden außer zahlreichen kleineren Überarbeitungen insbesondere die Abschnitte zur linearen Optimierung (1.8), Steigung einer Funktion (4.2) und Integralrechnung (5) erweitert und überarbeitet. Erweitert wurde der Bereich der Integralrechnung um eigene Abschnitte zur Flächenberechnung (5.4), zu Integralfunktionen (5.8) und zu uneigentlichen Integralen (5.9). Weiterhin wurden mit dem neuen Abschnitt zu Einheitsmatrizen und inversen Matrizen (1.2.3.3) einige grundlegende Inhalte aus dem Abschnitt zu inversen Matrizen (1.4.3) vorgezogen, denn diese werden bereits vorher im Buch benötigt. Schließlich wurde das Buch auf die neue Rechtschreibung umgestellt.

Bei der 12. Auflage und der 13. Auflage wurden einige kleinere Korrekturen und Ergänzungen vorgenommen.

Bei der 14. Auflage wurden einige Erweiterungen vorgenommen, neu sind Abschnitte zu Potenzreihen und Taylorpolynomen (4.9.5), Partialbruchzerlegung (5.6.3), Rotationskörpern (5.11) und kontinuierlicher

Verzinsung (8.5). Ergänzungen gab es zudem bei Folgen und Reihen und bei der Differentialrechnung mehrerer Variabler. Die 15. und die vorliegende 16. Auflage enthalten lediglich einige Überarbeitungen.

Vielen Dank an dieser Stelle an Krystian Bandzimiera, Klaus Blaschke, Matthias Brückner, Michael Ciplajevs, Malte Claußen, Jens Cordelair, Ann-Christin Dähnke, Boris Dahlke, Renate Dörsam, Christian Fechteler, Heike Hansen, Sabine Harms, Marco Hubrich, Jan Felix Kersten, Björn Lietz, Stefan Korbmacher, Claudia Lemke, Torsten Mestmacher, Jessica Resch, Dennis Riepshoff, Philipp Spönemann, Christoph Terlinde, Stephan Tolksdorf, Andreas Trauner, Albrecht Trautmann und Sebastian Wolf für die Durchsicht und Hinweise zur Verbesserung. Vielen Dank auch an alle Studierenden aus meinen Mathekursen, die mir Hinweise auf Fehler oder Verbesserungsvorschläge gaben.

Für inspirierende und motivierende Musik beim oft stundenlangen Schreiben und Denken am Computer bedanke ich mich insbesondere bei:

REM, heroes del silencio, Fury in the Slaughterhouse, Deine Lakaien, New Model Army, Herman van Veen ...

Peter Dörsam

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Algebra **13**

1.1 Vektorrechnung **13**

1.1.1 Grundlagen 13

1.1.2 Lineare Abhängigkeit 19

1.1.3 Vektorräume 23

1.1.4 Dimension und Basis 25

1.2 Matrizen **27**

1.2.1 Definition einer Matrix 27

1.2.2 Elementare Rechenregeln für Matrizen 29

1.2.2.1 Addition von Matrizen 29

1.2.2.2 Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl 30

1.2.2.3 Transposition von Matrizen 30

1.2.3 Multiplikation von Matrizen mit Matrizen 32

1.2.3.1 Grundlagen 32

1.2.3.2 Inhaltliche Interpretation von Matrizenprodukten 35

1.2.3.3 Einheitsmatrizen und Grundlagen zu inversen Matrizen 41

1.2.3.4 Übungsaufgaben zur Matrizenmultiplikation 45

1.3 Lineare Gleichungssysteme **46**

1.3.1 Strukturiertes Additionsverfahren 46

1.3.2 Der Gauß-Algorithmus 49

1.3.3 Mehrdeutige Lösungen 53

1.3.4 Schema für den Gauß-Algorithmus 56

1.3.5 Umgehen von Brüchen 58

1.3.6 Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme 60

1.3.7 Weitere Zusammenhänge 62

1.4 Determinanten, Rang und Inverse **64**

1.4.1 Determinanten 64

1.4.1.1 Grundlagen 64

1.4.1.2 Der Laplace Entwicklungssatz 67

1.4.1.3 Der Zahlenwert einer Determinante 70

1.4.1.4 Rechenregeln für Determinanten 71

1.4.2 Rang einer Matrix 73

1.4.3 Inverse Matrizen 76
1.4.3.1 Grundlagen 76
1.4.3.2 Existenz der inversen Matrix 77
1.4.3.3 Bestimmung der Inversen mittels der adjungierten Matrix 78
1.4.3.4 Bestimmung der Inversen mittels des Gauß-Algorithmus 81
1.4.3.5 Einige spezielle inverse Matrizen 83
1.4.4 Übungsaufgaben 84
1.4.5 Anwendungen auf lineare Gleichungssysteme 89
1.4.5.1 Mehrdeutige Lösungen und Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen 89
1.4.5.2 Die Cramersche Regel 91

1.5 Formales Rechnen mit Matrizen 93
1.5.1 Grundlagen 93
1.5.2 Übungsaufgaben 99

1.6 Konkrete Überprüfung auf lineare Abhängigkeit 100
1.6.1 Grundlagen 100
1.6.2 Übungsaufgaben 104

1.7 Überprüfung auf Vektorraumeigenschaften 108
1.7.1 Grundlagen 108
1.7.2 Unterräume 112
1.7.3 Bestimmung von Dimension und Basis des Vektorraumes 116

1.8 Lineare Optimierung 118
1.8.1 Grundlagen 118
1.8.2 Graphische Lösung 120
1.8.3 Spezifizierung der Optimierungsprobleme 128
1.8.4 Simplex Algorithmus 131
1.8.5 Schema zum Simplex Algorithmus 141

2 Folgen und Reihen 143

2.1 Grundlagen 143

2.2 Grenzwerte von Folgen 147

3 Funktionen **150**

3.1 Begriff der Funktion **150**

3.2 Ganzrationale Funktionen **152**

3.3 Nullstellen von Funktionen **153**

3.4 Gebrochenrationale Funktionen **155**

3.5 Wurzelfunktionen **156**

3.6 Umkehrfunktionen **158**

3.7 Exponentialfunktion und Logarithmus **160**

3.7.1 Exponentialfunktionen 160

3.7.2 Darstellung des Taschenrechners für sehr große und sehr kleine Zahlen 162

3.7.3 Rechenregeln für Exponenten 162

3.7.4 Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion 163

3.7.5 Rechenregeln für Logarithmen 165

3.8 Trigonometrische Funktionen **166**

3.8.1 Die Sinusfunktion 166

3.8.2 Winkelmaße – Bogenmaß (rad) und Gradmaß (deg) 167

3.8.3 Cosinus und Tangens 167

3.8.4 Trigonometrische Umkehrfunktionen 167

3.9 Grenzwerte von Funktionen **168**

3.9.1 Grenzwerte für x gegen unendlich 168

3.9.2 Grenzwerte gegen eine reelle Zahl 169

3.9.3 Regel von de l' Hospital 175

3.9.4 Schema zur Regel von de l' Hospital 177

3.9.5 Übungsaufgaben 179

3.10 Stetige und unstetige Funktionen **181**

4 Differentialrechnung einer Veränderlichen **184**

4.1 Einführung **184**

4.2 Steigung einer Funktion **185**

4.2.1 Steigung einer Geraden 185

4.2.2 Steigung von Sekante und Tangente 186

4.2.3 Bestimmung der Steigung einer Funktion 188

4.2.4 Differenzierbarkeit 191

4.3 Ableitungen verschiedener Funktionen **193**
4.3.1 Ableitung für Potenzen von x 193
4.3.2 Ableitungen mit Faktoren 195
4.3.3 Ableitungen für Sinus- und Cosinusfunktionen 196
4.3.4 Ableitungen von Exponentialfunktionen 196
4.3.5 Ableitung von Umkehrfunktionen 197
4.4 Ableitungen von verknüpften Funktionen **200**
4.4.1 Ableitungen von Summen und Differenzen 200
4.4.2 Kettenregel 201
4.4.3 Produktregel 204
4.4.4 Quotientenregel 206
4.5 Ableitungsübersicht **207**
4.6 Ableitungsübungen **208**
4.7 Bestimmung von Extremwerten **211**
4.7.1 Einführung 211
4.7.2 Bestimmung von Hoch-, Tief- und Sattelpunkten 211
4.7.2.1 Notwendige Bedingung 211
4.7.2.2 Hinreichende Bedingung für Hoch- und Tiefpunkte 213
4.7.3 Randextrema und Klassifizierung von Extrema 217
4.7.4 Besonderheiten bei unstetigen Funktionen 219
4.7.5 Besonderheiten bei streng monotonen Funktionen 221
4.7.6 Schema für die Bestimmung und Klassifizierung von Extremstellen 223
4.7.7 Übungsaufgaben 225
4.8 Wendepunkte **229**
4.9 Weitere Zusammenhänge **231**
4.9.1 Monotonie 231
4.9.2 Konkave und konvexe Funktionen 232
4.9.3 Newton-Verfahren 234
4.9.3.1 Grundlagen 234
4.9.3.2 Berechnung von Nullstellen 236
4.9.3.3 Konvergenz des Newton-Verfahrens 239
4.9.4 Mittelwertsatz 241

4.9.5 Potenzreihen und Taylorpolynome 242
4.9.5.1 Grundlagen 242
4.9.5.2 Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe 243
4.9.5.3 Taylorpolynome 246
4.9.5.4 Grafische Interpretation 248
4.9.5.5 Fehlerabschätzung 250
4.9.5.6 Allgemeine Taylorpolynome 252
4.9.6 Elastizitäten 254

5 Integralrechnung 259

5.1 Grundlagen 259

5.2 Berechnung von Integralen 262

5.3 Bestimmtes Integral 263

5.4 Flächenberechnung 265

5.5 Bestimmung von einfachen Integralen 267

5.5.1 Einfache Stammfunktionen 267
5.5.2 Integrale von Funktionen, die addiert oder mit Konstanten multipliziert werden 269
5.5.3 Einfache verkettete Funktionen 270

5.6 Komplexere Integrationsmethoden 271

5.6.1 Substitutionsregel 271
5.6.1.1 Grundlagen 271
5.6.1.2 Substitution als Umkehrung der Kettenregel 273
5.6.1.3 Substitution zur Umformung des Integrals 275
5.6.1.4 Substitution bei bestimmten Integralen 277
5.6.1.5 Schema zur Integration mittels Substitution 279
5.6.2 Partielle Integration 280
5.6.3 Partialbruchzerlegung 282
5.6.3.1 Grundlagen 282
5.6.3.2 Weitere Zusammenhänge 285
5.6.3.3 Schema zur Partialbruchzerlegung 291

5.7 Tabelle wichtiger Stammfunktionen 296

5.8 Integralfunktionen 299

5.9 Uneigentliche Integrale 300

5.10 Berechnung von Summen mittels Integralen 303

5.11 Rotationskörper 304

5.12 Übungsaufgaben 305

6 Differential- und Differenzengleichungen **308**

6.1 Differentialgleichungen **308**

6.1.1 Ökonomischer Bezug 308

6.1.2 Einteilungen von Differentialgleichungen 309

6.1.3 Trennung der Variablen 310

6.1.4 Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung 313

6.1.4.1 Homogene lineare Differentialgleichung 314

6.1.4.2 Inhomogene lineare Differentialgleichung 315

6.1.5 Aufgaben zu Differentialgleichungen 317

6.2 Differenzengleichungen **319**

7 Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher **322**

7.1 Grundlagen **322**

7.2 Partielle Ableitungen **325**

7.2.1 Grundlagen 325

7.2.2 Der Gradient einer Funktion 327

7.2.3 Übungen zu partiellen Ableitungen 328

7.3 Extremwerte von Funktionen mit mehreren Variablen **331**

7.4 Lagrangetechnik **338**

7.4.1 Grundlagen 338

7.4.2 Hinreichende Bedingung 342

7.4.3 Beispielaufgaben 343

7.4.3.1 Funktionen mit mehreren Nebenbedingungen 343

7.4.3.2 Verknüpfte Funktionen 345

7.4.3.3 Minimalkostenkombination 347

7.5 Totales Differential **349**

7.6 Abbildungen in den R^n **353**

7.6.1 Ableitungsmatrizen 353

7.6.2 Mehrdimensionale Kettenregel 354

7.6.3 Aufgaben zur mehrdimensionalen Kettenregel 354

8 Finanzmathematik **357**

8.1 Grundlagen **357**

8.2 Auf- und Abzinsen **357**

8.3 Konstante Zahlungsströme (Renten) **360**

8.4 Vorschüssige Zinszahlungen **362**

8.5 Unterjährige und kontinuierliche Verzinsung **362**

9 Anhang **365**

9.1 Lösungen von Gleichungen **365**
9.1.1 Lineare Gleichungen 365
9.1.2 Quadratische Gleichungen 366
9.1.2.1 Quadratische Ergänzung 366
9.1.2.2 pq-Formel 367
9.1.2.3 Weitere Zusammenhänge 368
9.1.3 Homogene Gleichungen höherer Ordnung 369
9.1.4 Inhomogene Gleichungen höherer Ordnung 369
9.1.5 Gleichungen mit Quotienten 371
9.1.6 Nicht lineare Gleichungssysteme 371
9.1.7 Ungleichungen 372
9.2 Bruchrechnen **375**
9.3 Grundlegende Rechenregeln **378**
9.3.1 Wurzeln und Potenzen 378
9.3.2 Multiplizieren von Klammern 378
9.4 Typische Fehler **380**
9.5 Formeln **382**
9.5.1 Rechenregeln für Matrizen 382
9.5.2 Rechenregeln für Determinanten 382
9.5.3 Rechenregeln für den Rang 383
9.5.4 Inverse Matrizen 384
9.5.5 Begriffe zu Matrizen 384
9.5.6 Lineare Gleichungssysteme 385
9.5.7 Bruchrechnen 386
9.5.8 Rechnen mit Exponenten 386
9.5.9 Logarithmen 387
9.5.10 Wichtige Identitäten 387
9.5.11 Ableitungsregeln 387
9.5.12 Ableitungsübersicht 388
9.5.13 Integrationsregeln 388
9.5.14 Tabelle wichtiger Stammfunktionen 389
9.6 Mathematische Zeichen **390**
9.7 Griechisches Alphabet **392**

Stichwortverzeichnis **394**

1 Lineare Algebra

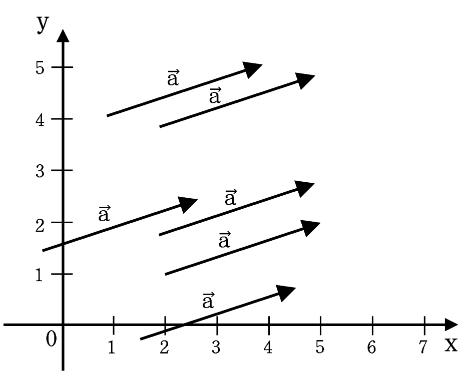
Algebra ist die Lehre der Gleichungen. Linear bedeutet, dass die Variablen in den Gleichungen nur in einfacher Potenz (x^1,y^1, ... ; und nicht x^2, y^4, $x * y$ usw.) vorkommen. Graphisch bedeutet linear, dass die betrachteten Gebilde Geraden oder Ebenen sind. In der Oberstufe wird in der Regel schon einiges an Linearer Algebra behandelt, wobei es hier häufig unter dem Oberbegriff Vektorrechnung steht. Einiges von dem, was in Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler behandelt wird, baut auf den Ideen der "Vektorrechnung" auf. Dabei ist es nicht nötig, den gesamten Stoff der Oberstufe zu beherrschen, aber die Grundideen sind doch zum weiteren Verständnis sehr wichtig. So lassen sich z.B. die meisten Eigenschaften von beliebig dimensionalen Vektorräumen "begreifen", wenn man sie sich anhand von zwei- oder dreidimensionalen Vektorräumen vorstellt.

Zunächst werden im Folgenden die grundlegenden Begriffe der "Vektorrechnung" dargelegt. Später werden dann die notwendigen Verallgemeinerungen durchgeführt, hierbei handelt es sich vor allem um die Erweiterung auf beliebig dimensionale Vektorräume und die Einführung von Matrizen und der für sie geltenden Rechenregeln.

1.1 Vektorrechnung

1.1.1 Grundlagen

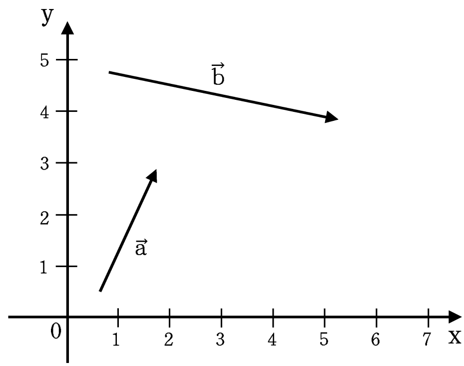
Jeder kennt sicher noch Zeichnungen, in denen man Vektoren als Pfeile darstellt.



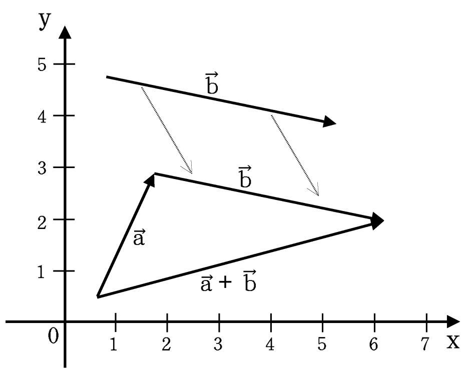
Wichtig ist es zu beachten, dass alle parallelen Pfeile mit gleicher Länge und dem Pfeil auf der gleichen Seite den gleichen Vektor repräsentieren.

Alle Pfeile in der nebenstehenden Abbildung sind somit **Repräsentanten** des gleichen Vektors $\vec{a}$.

Wenn zwei Vektoren addiert werden sollen, so kann man einfach den einen Vektor so verschieben, dass sie aneinandergereiht sind.



Um die beiden Vektoren in der nebenstehenden Zeichnung zu addieren, wird also einer der beiden Vektoren parallel verschoben. Nachfolgend wird der Vektor $\vec{b}$ so verschoben, dass er genau dort anfängt, wo der Vektor $\vec{a}$ endet. In der folgenden Zeichnung wurde dies durchgeführt.



Der Summenvektor $(\vec{a} + \vec{b})$ ergibt sich nun, indem man einen Vektor direkt von dem Anfang von $\vec{a}$ zu der Pfeilspitze von $\vec{b}$ zeichnet.

Die zeichnerische Darstellung vermittelt zwar eine schöne Vorstellung von dem Problem, hilft aber bei konkreten Rechnungen nur wenig. Um Vektoren auch rechnerisch addieren zu können, müssen sie in derselben **Basis** dargestellt sein. (Der Begriff der Basis wird später noch genauer erläutert werden.) Bei den dargestellten zweidimensionalen Vektoren ist die günstigste Basis die der Einheitsvektoren (Vektoren mit der Länge 1) in x- und in y-Richtung. Diese Basis nennt man auch **kanonische Basis**. Durch die **Linearkombination** der Basisvektoren können nun alle anderen Vektoren in der xy-Ebene dargestellt werden. (Linearkombination bedeutet, dass ein bestimmtes Vielfaches des einen Vektors mit einem bestimmten Vielfachen des anderen Vektors addiert wird.)