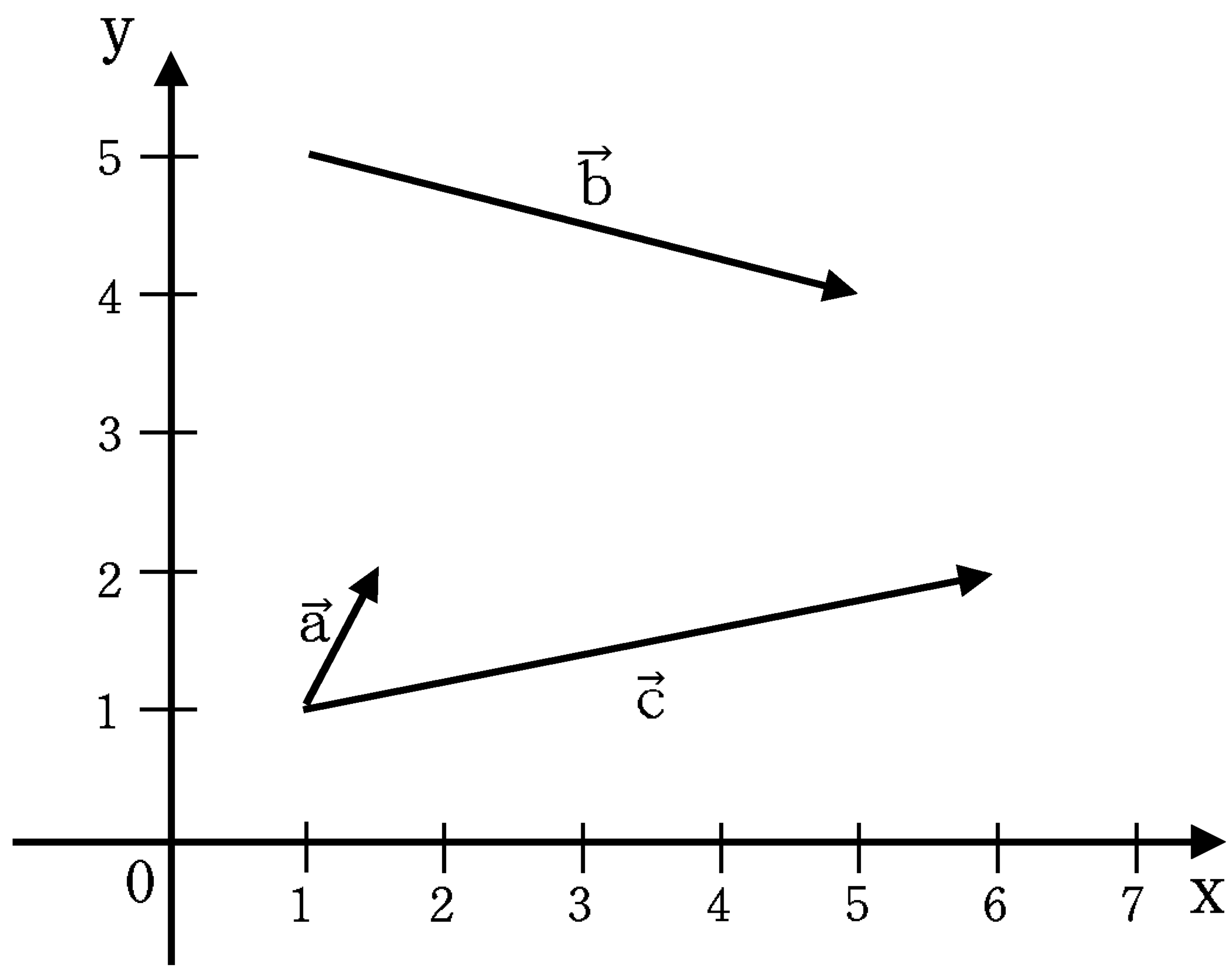
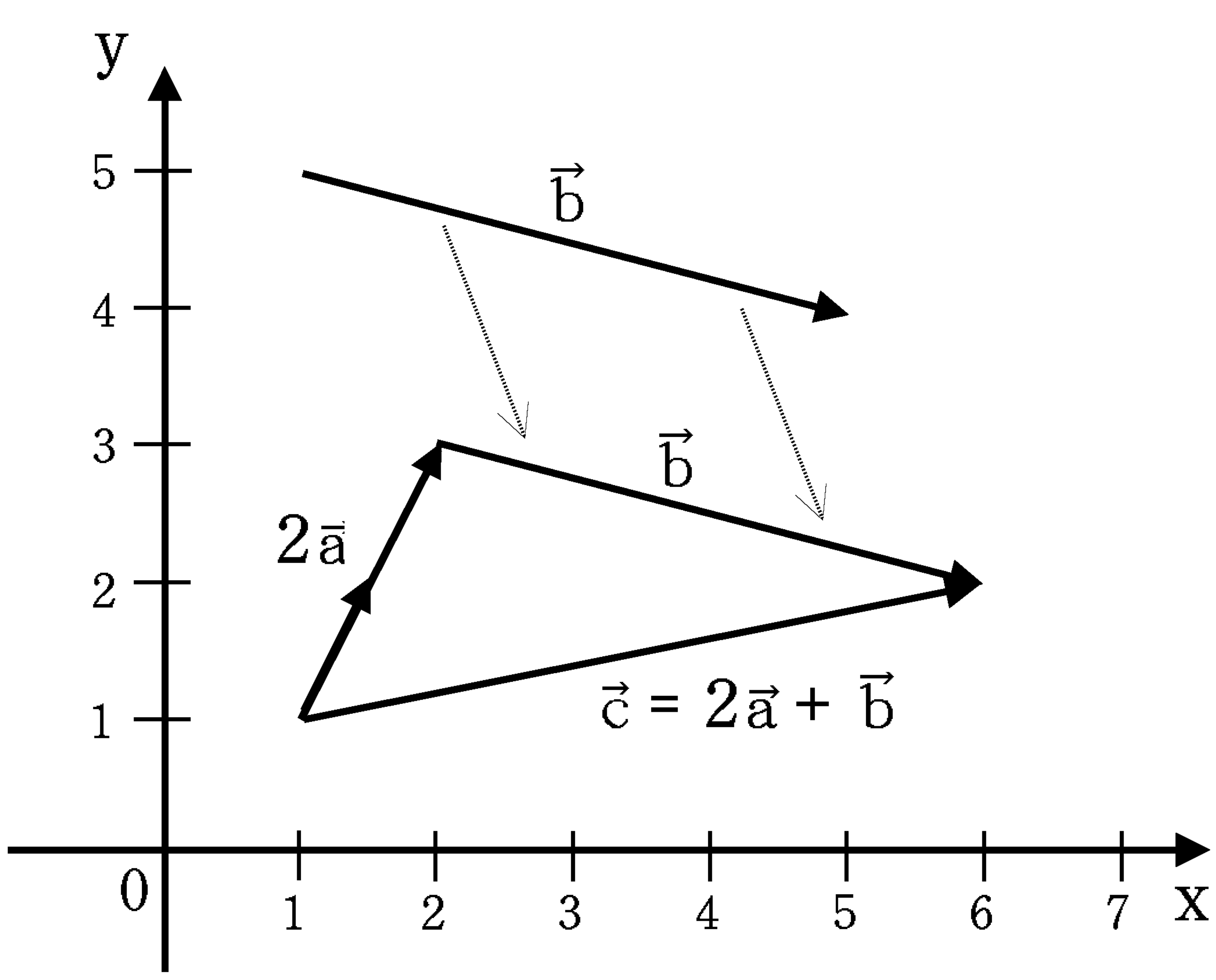
1.1.2 Lineare Abhängigkeit

Eine Menge von Vektoren ist genau dann linear abhängig, wenn sich einer von ihnen durch Addition beliebiger Vielfacher der anderen Vektoren darstellen läßt. In dem nebenstendem Diagramm sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig, denn der Vektor $\vec{c}$ läßt sich folgendermaßen als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen:



$$\vec{c} = 2 * \vec{a} + 1 * \vec{b}$$

In der nachfolgenden Zeichnung ist der entsprechende Zusammenhang zeichnerisch dargestellt.



Mittels der Koordinatenschreibweise läßt sich die lineare Abhängigkeit auch rechnerisch zeigen. Die drei Vektoren lauten in Koordinatenschreibweise:

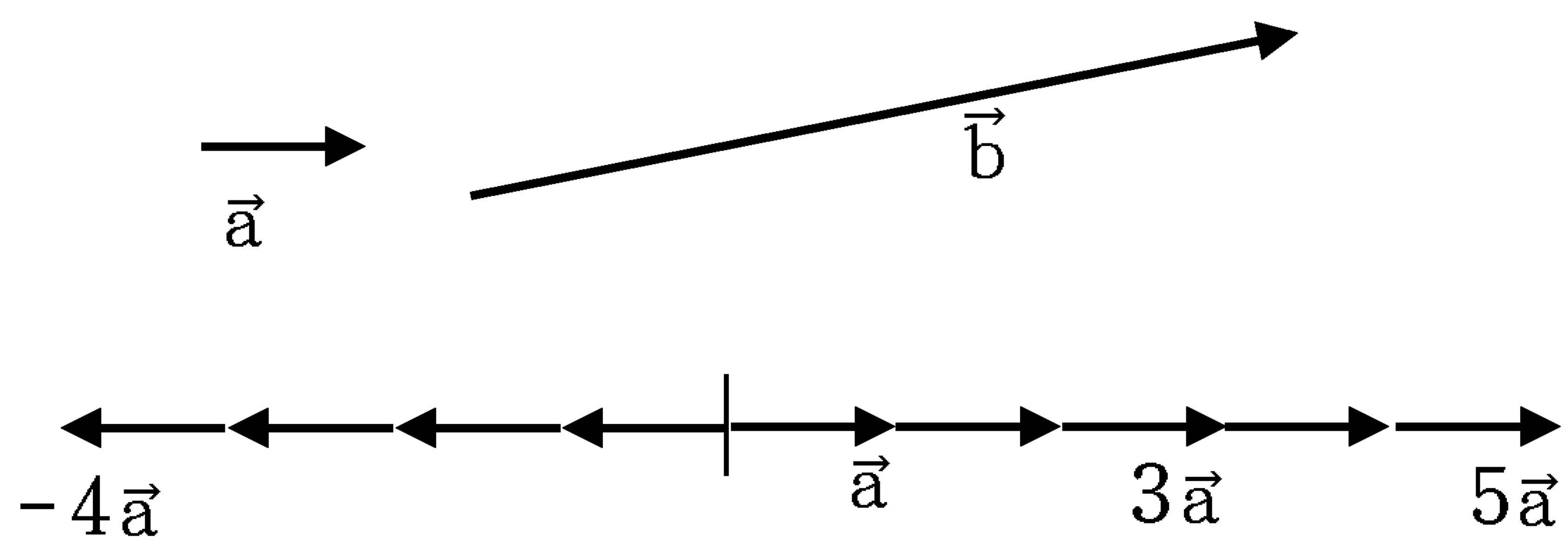
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Es ergibt sich also:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 * \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 * \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

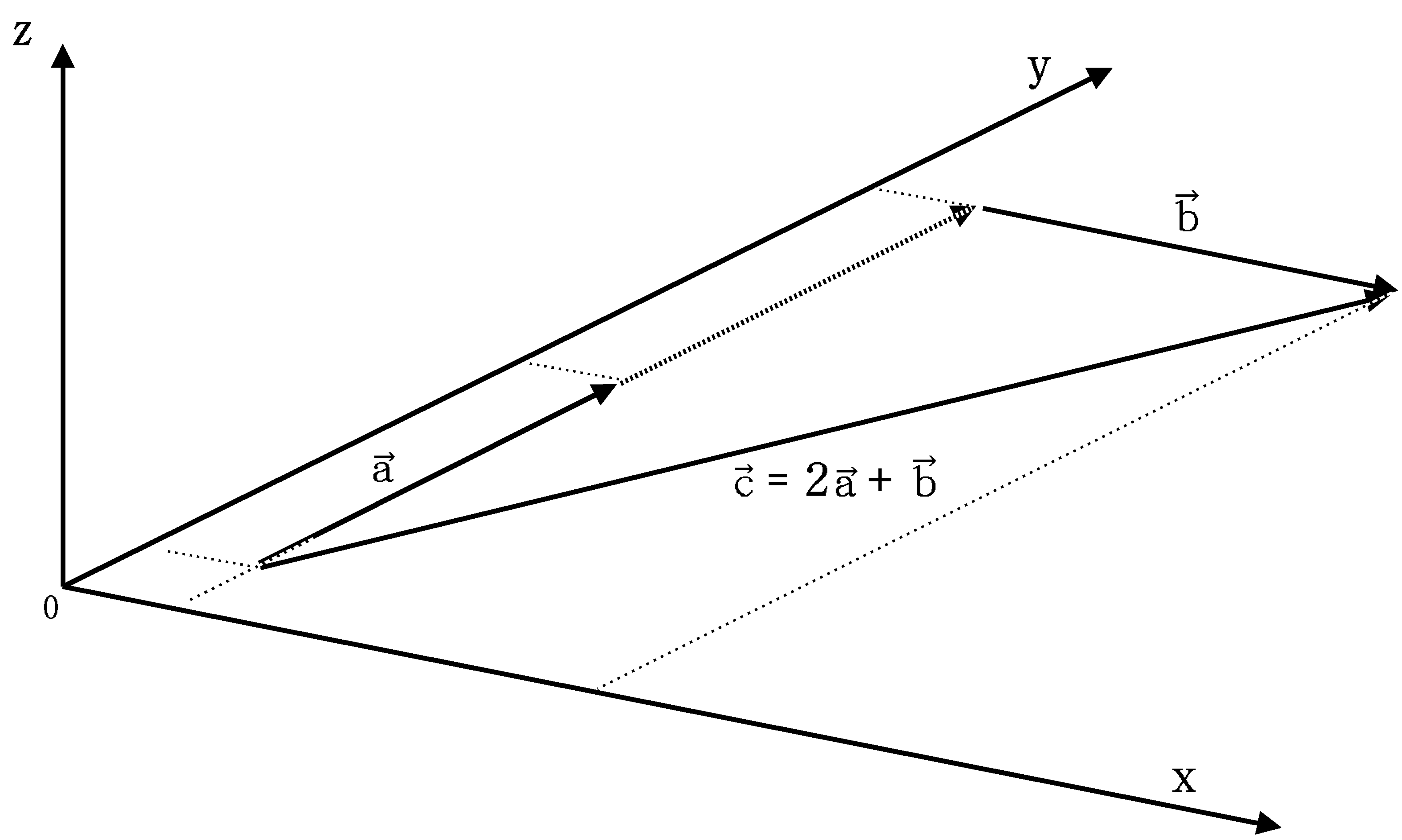
Zwei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn sie parallel zueinander sind. Denn bei zwei Vektoren bedeutet lineare Abhängigkeit, daß sich der eine als ein Vielfaches des anderen darstellen lassen muß. Bei zwei Vektoren, die linear abhängig sind, spricht man auch von **kollinearen** Vektoren.



In obiger Skizze sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig, denn egal mit welcher Zahl man den Vektor $\vec{a}$ multipliziert, man wird nie den Vektor $\vec{b}$ erhalten, sondern immer nur Vektoren, die wieder parallel zu $\vec{a}$ sind.

Drei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn sie in einer Ebene liegen. Die nachfolgende Abbildung zeigt drei Vektoren in einer Ebene, die linear abhängig sind. Wie man sieht, ergibt sich $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$. Man hätte aber z. B. auch den Vektor $\vec{a}$ durch die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellen können, es hätte sich dann ergeben:

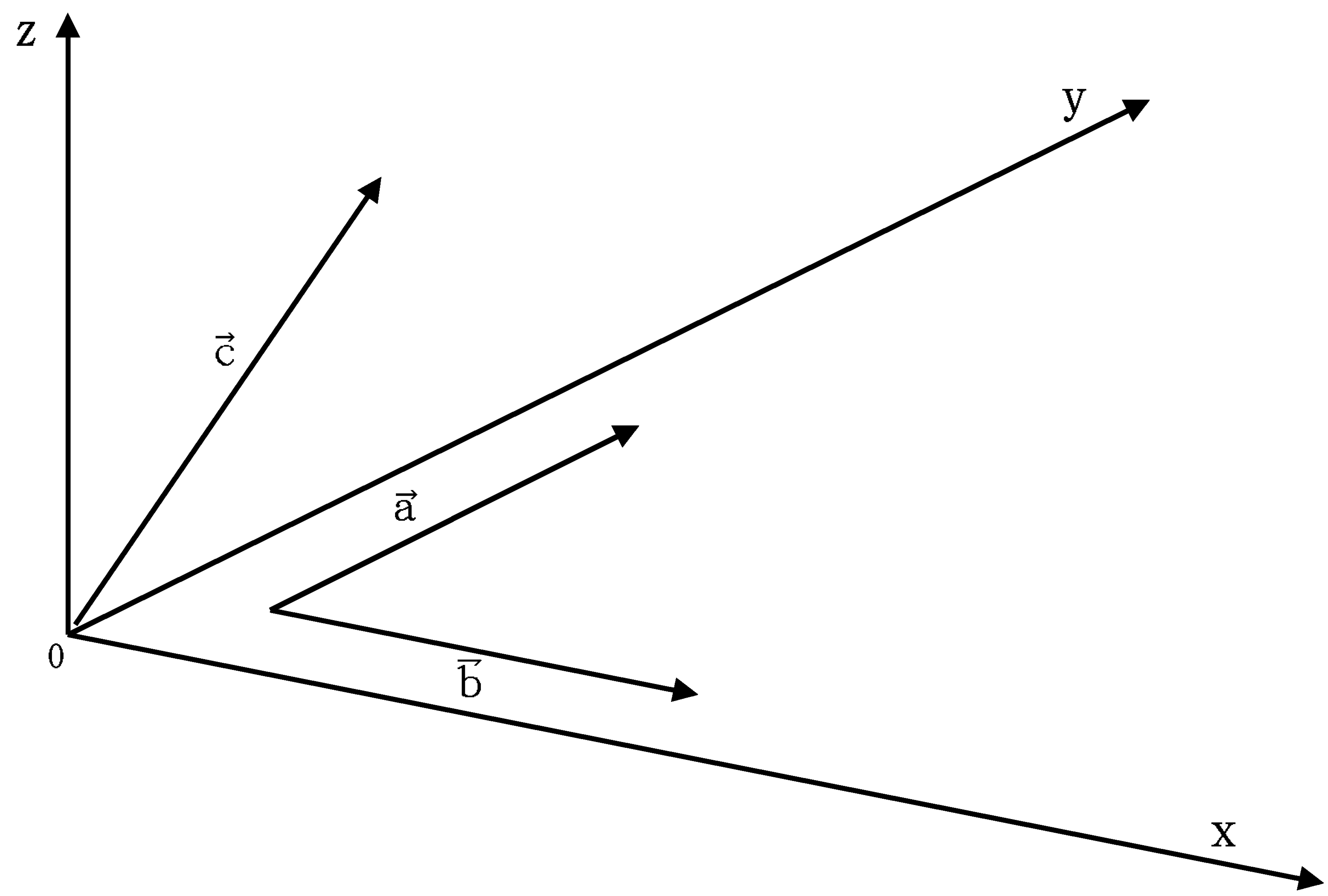
$$\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$$



Durch geeignete Linearkombination der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ läßt sich auch jeder andere Vektor in der xy-Ebene darstellen.

Die drei Vektoren liegen in dem Beispiel auf der xy-Ebene, im allgemeinen können die drei Vektoren aber auf jeder beliebigen Ebene liegen, die xy-Ebene wurde nur wegen der einfacheren graphischen Darstellung gewählt.

Die nächste Abbildung zeigt ein Beispiel für drei Vektoren, die linear unabhängig sind. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ verlaufen sozusagen auf dem "Fußboden", egal wie oft man diese aneinanderreiht, man bleibt immer auf dem Fußboden und kann nie den Vektor $\vec{c}$ bilden, der gewissermaßen in den Raum hineinragt.



Vielleicht erinnert sich manch einer noch aus der Schulzeit daran, daß man 3 Vektoren, die linear abhängig sind, auch **komplanare** Vektoren nennt. In der Schule wurden zwei Komplanaritätsbedingungen angegeben:

$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{c} \quad \text{oder} \quad \vec{a} = \lambda\vec{b}$$

Komplanar bzw. linear abhängig sind drei Vektoren, wenn eine der beiden Bedingungen erfüllt ist. Die erste Gleichung allein reicht nicht aus, denn wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ schon untereinander linear abhängig sind, so liegen die drei Vektoren immer in einer Ebene, auch wenn sich $\vec{c}$ nicht als Linearkombination durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen läßt. Statt dieser beiden Bedingungen kann man auch folgende Bedingung aufstellen:

> Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind genau dann komplanar, wenn die Gleichung $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = 0$ eine andere Lösung als die Triviallösung hat.

Bei der Triviallösung sind alle Parameter (λ, μ und ν) Null. Diese Lösung existiert natürlich immer. Wenn es eine andere Lösung gibt, so ist eine der beiden zuvor angeführten Bedingungen erfüllt. Somit sind die Vektoren dann linear abhängig. Die zuletzt angeführte Bedingung für lineare Abhängigkeit läßt sich auf eine beliebige Anzahl von Vektoren verallgemeinern. Es gilt:

> Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n$ sind genau dann **linear unabhängig**, wenn die Gleichung $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n = 0$ nur erfüllbar ist, wenn alle λ_i gleich Null sind.

Die Vektoren sind also linear unabhängig, wenn die angeführte Gleichung nur die Triviallösung hat. Gibt es noch eine andere Lösung, so sind die Vektoren linear abhängig.

Mit Hilfe des Summenzeichens kann man die Gleichung auch folgendermaßen schreiben:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i = 0$$

Das Summenzeichen bedeutet, daß für i nacheinander alle Werte von 1 bis n eingesetzt werden müssen und die sich dann jeweils ergebenden Ausdrücke summiert werden sollen. Man kann es sich als eine abkürzende Schreibweise für den in der Definition verwendeten Ausdruck vorstellen.