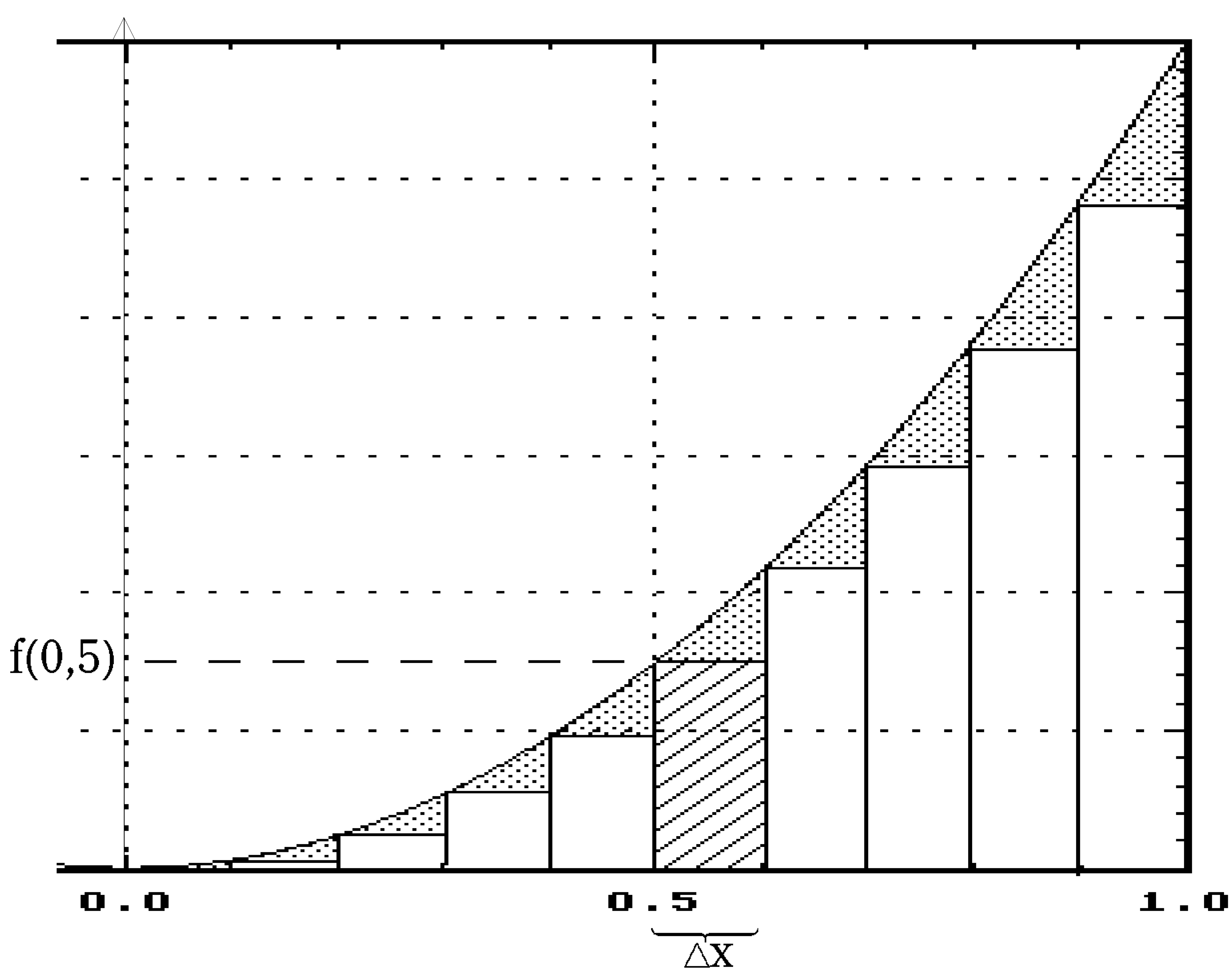
5 Integralrechnung

5.1 Grundlagen

Auch die Integralrechnung hat in den Wirtschaftswissenschaften große Bedeutung. Wie später noch gezeigt wird, können z.B. große Summen durch Integrale angenähert werden. Dies ist sehr vorteilhaft, denn Summen lassen sich sehr viel schwieriger umformen und berechnen als Integrale.

Das Integral einer Funktion berechnet die Fläche zwischen der Funktion und der x-Achse innerhalb gewisser Grenzen. (Dies allerdings nur, wenn die Funktion zwischen den Integrationsgrenzen die x-Achse nicht schneidet. Ansonsten muß das Integral für die Flächenberechnung an den Nullstellen der Funktion aufgeteilt und dann die Beträge der einzelnen Integrale addiert werden.)

Wie schon bei der Differentialrechnung, muß auch hier ein Grenzübergang durchgeführt werden. Die Fläche zwischen Funktion und x-Achse wird durch mehrere Rechtecke, deren Fläche sich leicht berechnen läßt, angenähert. Durch immer mehr und immer kleinere Rechtecke kann die Fläche immer besser angenähert werden. Nachfolgend wird dieses Verfahren in den Grundlagen beschrieben.



In der Abbildung ist die Fläche, die die Funktion zwischen 0 und 1 mit der x-Achse einschließt, durch mehrere Rechtecke angenähert worden. Alle Rechtecke haben die gleiche Breite ($\triangle x$), und ihre Höhe entspricht gerade dem Funktionswert auf ihrer linken Seite. Bei dem schraffierten Rechteck ist der x-Wert auf der linken Seite gerade 0,5, somit ist die Höhe dieses Rechtecks f(0,5). Für die Fläche (A) des Rechtecks ergibt sich somit:

$$A = f(0{,}5) * \triangle x$$

Für die gesamte Fläche aller Rechtecke folgt:

$$\sum_{i=0}^{9} A_i = \sum_{i=0}^{9} [f(i * \triangle x) * \triangle x]$$

Das Summenzeichen bedeutet, daß für i nacheinander alle natürlichen Zahlen von 0 bis 9 eingesetzt und die sich ergebenden Werte dann addiert werden müssen. Die Summe lautet also ausgeschrieben:

$$\sum_{i=0}^{9} [f(i * \triangle x) * \triangle x] = f(0) * \triangle x + f(1 * \triangle x) * \triangle x + \ldots + f(9 * \triangle x) * \triangle x$$

Bei dem ersten Rechteck ist der x-Wert auf der linken Seite Null, so daß sich als Höhe des Rechtecks f(0) ergibt und bei dem letzten $f(9\triangle x)$. $\triangle x$ ist hierbei gerade 0,1, denn die Strecke von 0 bis 1 wurde in 10 gleichgroße Stücke unterteilt.

Es ist klar, daß in dem betrachteten Fall die Summe aller Rechtecke kleiner als die wirkliche Fläche zwischen Funktion und x-Achse ist, und zwar gerade um die Fläche der gepunkteten Dreiecke. Daher nennt man diese Summe auch **Untersumme**. Wenn man bei den einzelnen Rechtecken jeweils den Funktionswert am rechten Rand angegeben hätte, so würde jedes Rechteck größer als die jeweilige Fläche unter der Funktion sein. Die sich auf diese Weise ergebende Summe nennt man **Obersumme**. Es sei darauf hingewiesen, daß die angeführte Einteilung in Unter- und Obersumme voraussetzt, daß die Funktion in dem betrachteten Bereich, wie in dem angeführten Beispiel, monoton steigend ist.

Wenn man bei den Summen $\triangle x$ immer kleiner wählt, also immer mehr und immer schmalere Rechtecke unter die Funktion zeichnet, so wird die Fläche der Rechtecke immer mehr an die Fläche zwischen Funktion und x-Achse herankommen. Dies ist in der nebenstehenden Abbildung für einen Ausschnitt verdeutlicht.